MATHEMATICS

HINREICHENDE BEDINGUNGEN FÜR ANALYTISCHE, HARMONISCHE UND SUBHARMONISCHE FUNKTIONEN. I

VON

J. RIDDER UND L. R. J. WESTERMANN

(Communicated at the meeting of December 17, 1960)

Angefangen wird mit Definitionen für lokal-analytische (oder monogene) und lokal-harmonische Funktionen und zugehörigen Eigenschaften. Darauf folgt die Behandlung der in einem Bereiche der (x, y)-Ebene analytischen, harmonischen oder subharmonischen Funktionen, welche dann in den Teilen II und III wird fortgesetzt.

Lokale Eigenschaften

§ 1. $x0y$ sei im euklidischen Raum $R^{(2)}$ ein positiv orientiertes rechtwinkliges Koordinatensystem, XOY ein im allgemeinen schiefwinkliges, gleich orientiertes Achsensystem. α sei der Winkel von positiver x- zur positiven X-Achse (bei Drehung in positivem Sinne, also $0 \leqq \alpha < 2\pi$), β der zwischen positiver X- und positiver Y-Achse (mit $0<\beta<\pi$). Dann ist für die Koordinaten x, y und X, Y eines Punktes von $R^{(2)}$:

$$(1) \qquad x = X \cos \alpha + Y \cos (\alpha+\beta), \qquad y = X \sin \alpha + Y \sin (\alpha+\beta),$$

und

$$(2) \quad X = \frac{1}{\sin \beta}\,[x \sin (\alpha+\beta) - y \cos (\alpha+\beta)],\; Y = \frac{1}{\sin \beta}\,[-x \sin \alpha + y \cos \alpha].$$

Für einen Vektor $\vec{\mathfrak{V}}$ mit Komponenten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in bezug auf $x0y$, und Komponenten $\mathfrak{P}_X$ und $\mathfrak{Q}_Y$ in bezug auf XOY hat man analog:

$$(3) \qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_X \cos \alpha + \mathfrak{Q}_Y \cos (\alpha+\beta),\; \mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_X \sin \alpha + \mathfrak{Q}_Y \sin (\alpha+\beta),$$

und

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_X = \dfrac{1}{\sin \beta}\,[\mathfrak{P} \sin (\alpha+\beta) - \mathfrak{Q} \cos (\alpha+\beta)], \\ \qquad\qquad \mathfrak{Q}_Y = \dfrac{1}{\sin \beta}\,[-\mathfrak{P} \sin \alpha + \mathfrak{Q} \cos \alpha]. \end{cases}$$

Definition. Eine in der Umgebung eines Punktes (X_0, Y_0) definierte Funktion $f(X, Y)$ ist in (X_0, Y_0) total-differenzierbar in bezug auf das zugehörige Koordinatensystem XOY, falls es zwei Konstanten, h und k, gibt mit der Eigenschaft, daß bei

$$(5) \quad \begin{cases} f(X, Y) - f(X_0, Y_0) = h \cdot (X - X_0) + k \cdot (Y - Y_0) + \\ \qquad + \eta(X, Y; X_0, Y_0) \cdot \delta(X, Y; X_0, Y_0), \end{cases}$$

wobei δ der Abstand von (X, Y) und (X_0, Y_0), der Grenzwert

$$\lim_{(X,Y)\to(X_0,Y_0)} \eta(X, Y;\ X_0, Y_0)$$

existiert, und gleich Null ist. Dann existieren $\frac{\partial f}{\partial X}$ und $\frac{\partial f}{\partial Y}$ in (X_0, Y_0) mit $\frac{\partial f}{\partial X}(X_0, Y_0) = h$, $\frac{\partial f}{\partial Y}(X_0, Y_0) = k$.

Satz. Ist eine in der Umgebung eines Punktes (X_0, Y_0) definierte Funktion $f(X, Y)$ total-differenzierbar in (X_0, Y_0) in bezug auf das Koordinatensystem XOY, so ist sie auch total-differenzierbar in bezug auf $x0y$, und umgekehrt.

Dabei ist dann in $(X_0, Y_0) \equiv (x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{\partial f}{\partial X}\sin(\alpha+\beta) - \frac{\partial f}{\partial Y}\sin\alpha\right], \tag{6a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sin\beta}\left[-\frac{\partial f}{\partial X}\cos(\alpha+\beta) + \frac{\partial f}{\partial Y}\cos\alpha\right], \tag{6b}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha, \tag{6c}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\alpha+\beta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\alpha+\beta). \tag{6d}$$

Beweis. Daß aus der Totaldifferenzierbarkeit in bezug auf (X, Y) dasselbe in bezug auf (x, y), mit (6a) und (6b), folgt, sieht man leicht durch Substitution von (2) und der korrespondierenden Formeln für $(X_0, Y_0) \equiv (x_0, y_0)$ in (5).

Die Umkehrung, mit (6c) und (6d), folgt in analoger Weise mit (1).

§ 2. Die Koordinatensysteme $x0y$, $X0Y$ seien wie in § 1. *Ein Vektor* $\vec{\mathfrak{V}}(x, y)$ *möge in der Umgebung von* $(x_0, y_0) \equiv (X_0, Y_0)$ *die Komponenten* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ *in bezug auf* $x0y$, *die Komponenten* $\mathfrak{P}_X$, $\mathfrak{Q}_Y$ *in bezug auf* $X0Y$ *haben.*

Satz. *Sind* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *total-differenzierbar in* (x_0, y_0) *in bezug auf* $x0y$, *so sind* $\mathfrak{P}_X$ *und* $\mathfrak{Q}_Y$ *in diesem Punkte total-differenzierbar in bezug auf* $X0Y$, *und umgekehrt. Außerdem ist dann*

$$\frac{\partial\mathfrak{P}(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Q}(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{P}_X(X_0, Y_0)}{\partial X} + \frac{\partial\mathfrak{Q}_Y(X_0, Y_0)}{\partial Y}; \tag{7}$$

man kann somit div $\vec{\mathfrak{V}}$ *sowohl durch das linke wie durch das rechte Glied von* (7) *definieren.*

Beweis. Wegen des vorangehenden Satzes und der Formeln (3) und (4) brauchen wir nur noch (7) abzuleiten. Die totale Differenzierbarkeit von $\mathfrak{P}_X$ und $\mathfrak{Q}_Y$ nach X und Y gibt aus (3) und (2) im Punkte $(x_0, y_0) \equiv (X_0, Y_0)$:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_X}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_X}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial \mathfrak{Q}_Y}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_Y}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \cdot \cos(\alpha+\beta)$$

$$= \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_X}{\partial X} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} + \frac{\partial \mathfrak{P}_X}{\partial Y} \cdot \frac{-\sin\alpha}{\sin\beta}\right) \cdot$$

$$\cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial \mathfrak{Q}_Y}{\partial X} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_Y}{\partial Y} \cdot \frac{-\sin\alpha}{\sin\beta}\right) \cdot \cos(\alpha+\beta),$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_X}{\partial X} \cdot \frac{-\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta} + \frac{\partial \mathfrak{P}_X}{\partial Y} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right) \cdot$$

$$\cdot \sin\alpha + \left(\frac{\partial \mathfrak{Q}_Y}{\partial X} \cdot \frac{-\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_Y}{\partial Y} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right) \cdot \sin(\alpha+\beta).$$

Addition liefert die gesuchte Relation.

Der vorige Satz rechtfertigt die

Definition. *Ein Vektor* $\vec{\mathfrak{V}}$, definiert in der Umgebung eines Punktes von $R^{(2)}$, heiße *in diesem Punkte total-differenzierbar*, falls bekannt ist, daß seine Komponenten in bezug auf ein willkürliches Achsensystem in dem Punkte beide total-differenzierbar sind.

Jeder in einem Punkte total-differenzierbare Vektor ist in dem Punkte als *divergenz-invariant* zu betrachten; denn nach (7) ist der Wert der Divergenz dann unabhängig vom benutzten Koordinatensystem.

§ 3. Definition. Die in der Umgebung von $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ definierte komplexwertige Funktion $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ ist *monogen in* z_0, falls $f'(z_0)$ existiert (xOy rechtwinkliges Koordinatensystem).

Bekanntlich [1]) ist dazu notwendig und hinreichend, daß u und v in bezug auf x und y in (x_0, y_0) total-differenzierbar sind, und daß

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$$

ist.

Mit Satz und Definition von § 2 folgt dadurch sofort der

Satz. *Damit* $f(z)$ *in* z_0 *monogen sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Vektoren* $\vec{V}_1(x, y)$, *mit Komponenten* u, $-v$, *und* $\vec{V}_2(x, y)$, *mit Komponenten* $-v$, $-u$, *in* $z_0 \equiv (x_0, y_0) \equiv (X_0, Y_0)$ *total-differenzierbar* (und somit divergenz-invariant) *sind, mit Divergenz Null in diesem Punkt* [2]).

---

[1]) Siehe [1], S. 23 u. 24. Ziffern in eckigen Klammern sind Hinweise auf die Bibliographie am Ende dieser Mitteilung.

[2]) Dies zeigt, daß ebenfalls notwendige und hinreichende Bedingungen sind: 1° die Total-differenzierbarkeit von u und v nach x und y in z_0; 2° die Existenz und

§ 4. Definition. Die in der Umgebung von (x_0, y_0) (beim rechtwinkligen Koordinatensystem $x0y$ in $R^{(2)}$) definierte reellwertige Funktion $u(x, y)$ ist *lokal-harmonisch in* (x_0, y_0), falls $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in dieser Umgebung existieren und in (x_0, y_0) total-differenzierbar sind, mit

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} = 0.$$

Wir bemerken, daß die Total-differenzierbarkeit von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ in (x_0, y_0) die Existenz aller zweiten partiellen Ableitungen von u in (x_0, y_0) impliziert, wobei dann außerdem $\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y\, \partial x}$ ist [3]).

Mit Eigenschaft und Definition von § 2 läßt sich folgern:

Satz. *Damit eine in der Umgebung von* (x_0, y_0) *definierte, nach* x *und nach* y *partiell differenzierbare reellwertige Funktion* $u(x, y)$ *in* (x_0, y_0) *lokal-harmonisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß der in dieser Umgebung definierte Vektor* $\vec{V}(x, y)$, *mit Komponenten* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *parallel zur* x- *bzw.* y-*Achse, in* (x_0, y_0) *total-differenzierbar (und somit divergenz-invariant) ist, mit Divergenz Null in diesem Punkt* [4]).

Bemerkung. In (x_0, y_0) sind $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ nun stetig, und ist u total-differenzierbar. Bei dem Achsensystem $X0Y$ gehören Komponenten von $\vec{V}(x_0, y_0)$ parallel zu den Achsen, welche mit $\frac{\partial u}{\partial X}$ und $\frac{\partial u}{\partial Y}$ zusammenfallen, falls $X0Y$ *rechtwinklig* gewählt wird.

§ 5. Satz. *Damit die in der Umgebung eines Punktes* (x_0, y_0) *definierte Funktion* $u(x, y)$, *welche dort (endliche) Ableitungen* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ *hat, in* (x_0, y_0) *lokal-harmonisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß* $\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x}$ *in* $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ *monogen ist.*

Gleichheit von $\lim\limits_{r\to+0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ und $\lim\limits_{r\to+0} \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k}$ bei $h = re^{i\theta_1}$ und $k = re^{i\theta_2}$ ($r > 0$; $\theta_1 - \theta_2 \neq n\pi$ bei n willkürlich ganz). Siehe auch [2], S. 23 (Th. 5).

3) Siehe [3], S. 152 (Zusatz 1).

4) Ist β ($0 < \beta < \pi$), wie in § 1, der Winkel von positiver X- und positiver Y-Achse, und hat u (als Funktion von X und Y) außerdem in jedem Punkte der betrachteten Umgebung von $(x_0, y_0) \equiv (X_0, Y_0)$ partielle Ableitungen nach X und nach Y, so sind $\frac{\partial u}{\partial X}$ und $\frac{\partial u}{\partial Y}$ total-differenzierbar in (X_0, Y_0), und dabei ist in (X_0, Y_0)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\cos\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0.$$

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Denn nach erstem und zweitem Absatz von § 4 ist bei u lokal-harmonisch in (x_0, y_0)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\right],\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\right]=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\right];$$

nach der Definition von § 3 ist somit $\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial x}$ monogen in z_0.

Die Bedingung ist hinreichend. Denn $\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial x}$ monogen in z_0 liefert, nach § 3, $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ total-differenzierbar in (x_0, y_0) und

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\right]=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\right],\ \text{also}\ \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}=0.$$

Globale Bedingungen abgeleitet nach dem Goursatschen Verfahren

§ 6. Satz. *In den Punkten (x, y) eines Bereiches B ($x0y$ rechtwinklig und positiv orientiert) sei ein Vektor $\vec{V}(x, y)$, mit Komponenten $P(x, y)$, $Q(x, y)$ parallel zur x- bzw. y-Achse, gegeben. Der Vektor $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$, senkrecht auf $\vec{V}(x, y)$, habe die Komponenten $\mathfrak{P}(x, y)=Q(x, y)$, $\mathfrak{Q}(x, y)=-P(x, y)$. Ist nun $\vec{\mathfrak{B}}(x, y)$ in jedem Punkte von B total-differenzierbar (§ 2) mit Divergenz $\leqq 0$, so ist für jedes abgeschlossene Intervall $\bar{I}$ (Seiten parallel zur x- und y-Achse) in B, bei positiv orientiertem Rand R,*

$$\textstyle\int_R \vec{V}\cdot\vec{ds}\ \textit{oder}\ \int_R P\,dx+Q\,dy=0.$$

Beweis. Wir wenden das Goursatsche Verfahren an, und nehmen dazu $\int_R P\,dx+Q\,dy=p>0$ an. Fortgesetzte Vierteilung (d.h. Halbierung der Seiten) liefert eine Folge ineinandergeschachtelter Intervalle $\bar{I}_1\supset\ldots\supset\bar{I}_k\supset\ldots$ mit den (positiv orientierten) Rändern $R_1, \ldots, R_k, \ldots$ und

$$\int_{R_k} P\,dx+Q\,dy\geqq\frac{p}{4^k}\qquad(k=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

(x_0, y_0) sei der Limespunkt dieser R_k.

Wegen der Total-differenzierbarkeit von $\vec{\mathfrak{B}}$ in (x_0, y_0) ist

$$P(x, y)=P(x_0, y_0)+(x-x_0)\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}+\varepsilon_1\cdot\delta(x, y; x_0, y_0)$$

und

$$Q(x, y)=Q(x_0, y_0)+(x-x_0)\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y}+\varepsilon_2\cdot\delta(x, y; x_0, y_0),$$

mit $\delta(x, y; x_0, y_0)=$ Abstand der Punkte (x, y) und (x_0, y_0), und $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\varepsilon_j=0$ $(j=1, 2)$.

Dadurch ist

$$\int_{R_k} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} \int_{R_k} (y-y_0)\,dx + \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} \int_{R_k} (x-x_0)\,dy + \\ + \int_{R_k} \varepsilon_1 \cdot \delta\,dx + \varepsilon_2 \cdot \delta\,dy$$

$$= \operatorname{div} \vec{\mathfrak{V}}(x_0, y_0) \cdot m(\bar{I}_k) + \int_{R_k} \varepsilon_1 \cdot \delta\,dx + \varepsilon_2 \cdot \delta\,dy.$$

Zu positivem η gibt es eine natürliche Zahl N derart daß für die Punkte von R_k bei $k \geqq N$ gleichmäßig gilt

$$|\varepsilon_j| < \eta \quad (j = 1, 2).$$

Ist h größte Seitenlänge von $\bar{I}$, so folgt bei $k \geqq N$:

$$(9) \quad \int_{R_k} P\,dx + Q\,dy \leqq \int_{R_k} \varepsilon_1 \cdot \delta\,dx + \varepsilon_2 \cdot \delta\,dy < 2 \cdot \frac{h}{2^k} \cdot \frac{h\sqrt{2}}{2^k} \cdot 2\eta = \frac{4\sqrt{2}}{4^k} \cdot h^2 \cdot \eta.$$

(8) und (9) liefern (bei $k \geqq N$):

$$\frac{p}{4^k} < \frac{\sqrt{2}}{4^{k-1}} \cdot h^2 \cdot \eta \quad \text{oder} \quad \frac{p}{4\sqrt{2} \cdot h^2} < \eta.$$

Wegen η willkürlich positiv gelangen wir zu einem Widerspruch.

Folgerung 1. Nimmt man im eben bewiesenen Satze $\operatorname{div} \vec{\mathfrak{V}} \equiv 0$ in B an, so ist für jedes $\bar{I} \subset B$, mit Rand R,

$$\int_R P\,dx + Q\,dy = 0;$$

ist B einfach zusammenhängend, so gibt es dann eine in B eindeutige Funktion mit totalem Differential $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ (in bezug auf $x0y$).

Folgerung 2 (Satz von Goursat). Ist die komplexwertige Funktion $f(z)$ monogen in jedem Punkt eines Bereiches B, so ist sie analytisch in B.

Beweis. Denn bei $f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ sind dann, nach dem Satze von § 3, die Vektoren $\vec{\mathfrak{V}}_1(x, y)$, mit Komponenten $-v$ und $-u$ parallel zur x- bzw. y-Achse, und $\vec{\mathfrak{V}}_2(x, y)$, mit Komponenten u and $-v$ parallel zu diesen Achsen, in jedem Punkte von B total-differenzierbar (und divergenz-invariant), und ist dabei in B

$$\operatorname{div} \vec{\mathfrak{V}}_1 = \operatorname{div} \vec{\mathfrak{V}}_2 \equiv 0.$$

Somit ist nach dem Satze dieses Par. für jedes $\bar{I} \subset B$, mit Rand R,

$$\int_R f(z)\,dz = \int_R u\,dx - v\,dy + i \int_R v\,dx + u\,dy = 0,$$

woraus nach dem Satze von Morera die Analytizität von $f(z)$ in B folgt.

Folgerung 3. *Ist die reellwertige Funktion $u(x, y)$ lokal-harmonisch in jedem Punkt eines Bereiches B, so ist sie harmonisch in B* [5].

[5]) Dies läßt sich mit dem Satze von § 5 auch ableiten aus dem Satz von Goursat (Folgerung 2).

Beweis. Mit dem Satz von § 4 folgt, daß der Vektor $\vec{V}(x, y)$, mit den Komponenten $-\frac{\partial u}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial y}$ parallel zur x- bzw. y-Achse, in den Punkten von B total-differenzierbar ist, mit Divergenz $\equiv 0$ in B.

Nach dem Satze dieses Par. folgt für den Vektor $\vec{V}(x, y)$, mit Komponenten $\frac{\partial u}{\partial y}$, $-\frac{\partial u}{\partial x}$ parallel zur x- bzw. y-Achse, und jedes in B enthaltene abgeschlossene Intervall $\bar{I}$, mit Rand R,

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \quad \text{oder} \quad \int_R \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = 0.$$

Nach einem Analogon des Moreraschen Satzes bei harmonischen Funktionen [6]) folgt daraus die Harmonizität von $u(x, y)$ in B.

Folgerung 4. *Existiert für die in B definierte reellwertige Funktion $u(x, y)$ in jedem Punkte von B der Vektor $\vec{\mathfrak{V}}(x, y)$, mit Komponenten $-\frac{\partial u}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial y}$ parallel zur x- bzw. y-Achse, und ist $\vec{\mathfrak{V}}(x, y)$] in den Punkten von B total-differenzierbar mit Divergenz $\leqq 0$, so ist $u(x, y)$ subharmonisch in B.*

Beweis. Anwendung des Satzes dieses Par. liefert für jedes in B enthaltene $\bar{I}$, mit Rand R,

$$\int_R \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \quad \text{oder} \quad \int_R \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \leqq 0.$$

Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ in B folgt daraus für jeden positiv orientierten Kreis C, der samt seinem Innern in B liegt,

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \leqq 0. \text{ [7])}$$

Nach einem Satze von S. Saks [8]) ist dadurch $u(x, y)$ subharmonisch in B.

Globale Bedingungen abgeleitet unter Anwendung eines Verfahrens von Besicovitch

§ 7. Nach einem von Besicovitch herrührenden Verfahren leiteten Saks und Zygmund ein Theorem [9]) ab, von welchem der erste hier folgende Hilfssatz ein Spezialfall ist.

Definition. *Stetigkeit einer (endlichwertigen) Intervallfunktion $\Phi(\bar{I})$ im Intervall $\bar{I}_0$* soll heißen: zu jedem positiven ε gibt es eine positive

[6]) Vergleiche [4], S. 227 (Th. 13).

[7]) Siehe auch das allgemeine Theorem in Teil II, § 8.

[8]) Siehe [5], S. 382, Nr. 4 (in Theorem 1 = ersetzt durch $\geqq$, lim durch lim inf).

[9]) Siehe [6]; [7], S. 30, 31 (Th. 5.1); [8], S. 193 (Th. 4.4).

Zahl δ derart daß für jedes (abgeschlossene) Teilintervall $\bar{I}^*$ von $\bar{I}_0$ gilt: $|\Phi(\bar{I}^*)| < \varepsilon$, falls $m(\bar{I}^*) < \delta$.

Definition. *Die obere und untere Derivierte einer Intervallfunktion* $\Phi(\bar{I})$, definiert für die zu einem Bereiche B (in $R^{(2)}$) gehörenden abgeschlossenen Intervalle $(\bar{I})$, *in einem Punkte* $(x, y) \in B$, $D^+_{(x,y)}\,\Phi(\bar{I})$ bzw. $D^-_{(x,y)}\,\Phi(\bar{I})$, seien definiert als $\limsup\limits_{m(\bar{I}) \to 0} \dfrac{\Phi(\bar{I})}{m(\bar{I})}$ bzw. $\liminf\limits_{m(\bar{I}) \to 0} \dfrac{\Phi(\bar{I})}{m(\bar{I})}$ wobei $\bar{I}$ ein achsenparalleles *Quadrat* ist, das (x, y) enthält. Sind sie einander gleich, so definiere ihr gemeinsamer Wert *die Ableitung*, $D_{(x,y)}\Phi(\bar{I})$, *von* $\Phi(\bar{I})$ *in* (x, y).

Hilfssatz. Hat die für die abgeschlossenen Intervalle $(\bar{I})$ eines Bereiches B (in $R^{(2)}$) beschränkt additive, in jedem derartigen Intervall stetige Intervallfunktion $\Phi(\bar{I})$ die Eigenschaften: α. in jedem Punkte $(x, y) \in B$ ist $\lim\limits_{\bar{I} \to (x,y)} \dfrac{\Phi(\bar{I})}{\delta(\bar{I})} = 0$, wobei $\delta(\bar{I})$ der Diameter des (x, y) enthaltenden und sich in (x, y) zusammenziehenden Intervalles $\bar{I}$; β. $D^+\Phi$ kann nur $+\infty$ sein in den Punkten einer Teilmenge $E = \sum\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ von B, mit jeder Menge E_j von endlichem linearen Maße; γ. fast überall in B ist $D^+\Phi \leqq f(x, y)$, wobei f über jedes $\bar{I}$ in B integrierbar nach Lebesgue, so ist für jedes derartige $\bar{I}$

$$\Phi(\bar{I}) \leqq \iint_{\bar{I}} f \cdot d\sigma.$$

Hilfssatz [10]). Sind $p(x, y)$ und $q(x, y)$ stetig im Bereiche B, und beide total-differenzierbar im Punkte $(x_0, y_0) \in B$, so hat die in B definierte Intervallfunktion $\Phi(\bar{I}) \equiv \int_R p\,dx + q\,dy$ (R positiv orientierter Rand von $\bar{I}$) eine Ableitung in (x_0, y_0), $D_{(x_0,y_0)}\Phi(\bar{I})$, gleich

$$\frac{\partial q(x_0, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Aus diesen Hilfssätzen folgt sofort der

Satz. Sind im Bereiche B die Funktionen $p(x, y)$, $q(x, y)$ stetig, sind sie total-differenzierbar in den Punkten von $B - E$, wobei $E = \sum\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, mit jeder Menge E_j von endlichem linearen Maß, so ist in allen Punkten von $B - E$

$$D_{(x,y)}\,\Phi(\bar{I}) = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial p(x, y)}{\partial y},$$

wobei $\Phi(\bar{I})$ definiert wie im letzten Hilfssatz. Gibt es dabei ein über jedes $\bar{I}$ in B nach Lebesgue integrierbare Funktion $f(x, y)$ mit

10) Siehe [9], S. 151 (Hilfssatz 2).

$f(x, y) \geqq \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}$ in fast allen Punkten von B, so ist für jedes $\bar{I}$, mit positiv orientiertem Rand R,

$$\int_R p\, dx + q\, dy \leqq \iint_{\bar{I}} f \cdot d\sigma.$$

Anwendung dieses Satzes zeigt, *daß in den Bedingungen der Folgerungen 1 bis 4 von § 6 eine Ausnahmemenge $E = \sum_{j=1}^{\infty} E_j$, mit jedem E_j von endlichem linearen Maße, zugelassen werden darf* [11]), wenn man $P(x, y)$, $Q(x, y)$ bzw. $f(z)$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ in allen Punkten von B als stetig voraussetzt.

---

[11]) Für den Fall der Folgerungen 2, 3, 4 vergleiche schon [10], § 5 (Korollar), § 4 (Erstes u. zweites Korollar).

BIBLIOGRAPHIE

1. Heffter, L., Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen, Berlin 1955.
2. Menchoff, D., Les conditions de monogénéité, Act. sci Paris 1936.
3. Haupt, O., G. Aumann und C. Y. Pauc, Differential- und Integralrechnung, Band II, Zweite Auflage, Berlin 1950.
4. Kellogg, O. D., Foundations of potential theory, Berlin 1929.
5. Saks, S., Note on defining properties of harmonic functions. Bull. Am. Math. Soc. **38**, S. 380–382 (1932).
6. Besicovitch, A. S., On sufficient conditions for a function to be analytic, and on behaviour of analytic functions in the neighbourhood of non isolated singular points. Proc. London Math. Soc. **32**, S. 1–10 (1930).
7. Saks, S. und A. Zygmund, On functions of rectangles and their application to analytic functions. Ann. Scuola norm. sup. Pisa (2) **3**, S. 27–32 (1934).
8. Saks, S., Theory of the integral, second ed., Warszawa (1937).
9. Ridder, J., Über den Cauchyschen Integralsatz für reelle und komplexe Funktionen. Math. Ann. **102**, S. 132–156 (1929).
10. ————, Harmonische, subharmonische und analytische Funktionen. Ann. Scuola norm. sup. Pisa (2) **9**, S. 277–287 (1940).